

# XV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

## ЗАВДАННЯ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

**Олександр КУКУШ** — професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, заступник голови журі турніру

**Ігор МИТЕЛЬМАН** — заслужений вчитель України, доцент, заступник директора Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова, заступник голови журі турніру

**Катерина РАБЕЦЬ** — доцент Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, експерт-консультант турніру

**Іван ФЕДАК** — доцент Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, член журі турніру

**В'ячеслав ЯСІНСЬКИЙ** — заслужений вчитель України, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заступник голови журі турніру

### ЗАДАЧІ ВІДБІРНИХ ЕТАПІВ XV ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

#### 1. Рівняння з цілими частинами.

Для кожного значення параметра  $a \in [0; 2]$  розв'яжіть рівняння  $[a \sin x] = [a \cos x]$ , де  $[u]$  — ціла частина числа  $u$ , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує  $u$ .

##### Розв'язання.

1)  $a = 0$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x],$$

$$[0] = [0],$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

2)  $0 < a < 1$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x] = -1,$$

$$x \in \left(-\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$[a \sin x] = [a \cos x] = 0,$$

$$x \in \left[2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

3)  $a = 1$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x] = -1,$$

$$x \in \left(-\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$[a \sin x] = [a \cos x] = 0,$$

$$x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

4)  $1 < a < \sqrt{2}$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x] = -1,$$

$$x \in \left[-\pi + \arccos \frac{1}{a} + 2\pi n, -\pi + \arcsin \frac{1}{a} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

$$[a \sin x] = [a \cos x] = 0,$$

$$x \in \left(\arccos \frac{1}{a} + 2\pi n, \arcsin \frac{1}{a} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

5)  $a = \sqrt{2}$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x] = -1,$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

© Кукуш О. ?, Мітельман І. ?, Рабець К. ?, Федак І. ?, Ясінський В. ?, 2013

$$[a \sin x] = [a \cos x] = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6)  $\sqrt{2} < a \leq 2$ .

$$[a \sin x] = [a \cos x] = -2,$$

$$x \in \left(-\pi + \arcsin \frac{1}{a} + 2\pi n, -\pi + \arccos \frac{1}{a} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$[a \sin x] = [a \cos x] = 1,$$

$$x \in \left[\arcsin \frac{1}{a} + 2\pi n, \arccos \frac{1}{a} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

Інших цілих значень ліва і права частини рівняння одночасно набувати не можуть.

#### 2. Відновіть трикутник.

На дошці зобразили такий трикутник  $ABC$ , що  $AB + AC = 2BC$ . У цьому трикутнику провели бісектриси  $AL_1$ ,  $BL_2$ ,  $CL_3$ , після чого все витерли, крім точок  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ . За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник  $ABC$ .

##### Розв'язання.

Нехай  $I$  — точка перетину бісектрис цього трикутника. За властивістю бісектрис маємо рівність

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1} = \frac{AI}{IL_1} = k.$$

Враховуючи умову задачі, звідси отримуємо  $2BC = AB + AC = k(BL_1 + CL_1) = kBC$ ;  $k = 2$ .

Оскільки (див. Кушнір І. А. Трикутник у задачах. — К.: Либідь, 1994. — С. 65)

$$\operatorname{tg} \angle L_2 L_1 L_3 = \frac{2(\sin \angle B + \sin \angle C)}{1 + 2 \cos \angle A}.$$

З умови  $AB + AC = 2BC$  випливає, що  $BC$  є середньою за довжиною стороною трикутника  $ABC$ , тому  $\angle A$  гострий,  $\cos \angle A > 0$ , отже, кут  $\varphi = \angle L_2 L_1 L_3$  також є гострим. Далі, враховуючи умову задачі та теорему синусів, отримуємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \angle L_2 L_1 L_3 = \frac{2\left(\frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}\right) \sin \angle A}{1 + 2 \cos \angle A} =$$

$$= \frac{4 \sin \angle A}{1 + 2 \cos \angle A} = \frac{8 \sin \frac{\angle A}{2} \cos \frac{\angle A}{2}}{3 \cos^2 \frac{\angle A}{2} - \sin^2 \frac{\angle A}{2}},$$

звідки знаходимо

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{\sqrt{16+3\operatorname{tg}^2\varphi}-4}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Далі, вибираючи довільний відрізок, який вважаємо одиничним, з врахуванням властивостей прямокутних та подібних трикутників за відомим гострим кутом  $\varphi$  послідовно будемо

$$\operatorname{tg}\varphi, \operatorname{tg}^2\varphi, 3\operatorname{tg}^2\varphi, 16+3\operatorname{tg}^2\varphi, \sqrt{16+3\operatorname{tg}^2\varphi}, \sqrt{16+3\operatorname{tg}^2\varphi}-4, \frac{\sqrt{16+3\operatorname{tg}^2\varphi}-4}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Маючи  $\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2}$ , побудуємо рівнобедрений трикутник  $L_2L_3$  з основою  $L_2L_3$ , у якому  $\operatorname{tg} \frac{\angle V}{2} = \operatorname{tg} \frac{\angle A}{2}$ , так, щоб вершина  $V$  і точка  $L_1$  лежали по різні боки від прямої  $L_2L_3$ .

Опишемо коло навколо побудованого трикутника.

На його дузі  $L_2L_3$ , яка містить точку  $V$ , лежатиме вершина  $A$  трикутника  $ABC$ .

Якщо точка  $M$ , яка є серединою іншої дуги  $L_2L_3$  цього кола, не збігається з точкою  $L_1$ , то вершину  $A$  отримуємо на перетині побудованого кола і прямої  $ML_1$ .

Поділивши відрізок  $AL_1$  у відношенні 2:1, знайдемо точку  $I$  перетину бісектрис трикутника  $ABC$ .

Тоді на перетині прямих  $AL_3$  та  $IL_2$  отримаємо вершину  $B$ , а на перетині прямих  $AL_2$  та  $IL_3$  отримаємо вершину  $C$  шуканого трикутника.

Якщо точка  $M$  збігається з точкою  $L_1$ , то трикутник  $L_2L_1L_3$  (а з ним і трикутник  $ABC$ ) є рівнобедреним. При цьому вершина  $A$  збігатиметься з точкою  $V$ .

### 3. Гра у кульки.

На столі лежать дві купки кульок, у першій з яких  $m$  кульок, у другій —  $n$ . За один хід можна з однієї з купок прибрати одну, дві або три кульки. Іванко та Марійка роблять ходи по черзі, Марійка ходить першою. Виграє той, хто робить останній хід (тобто після ходу якого на столі взагалі не залишається кульок). Хто з гравців може забезпечити собі перемогу у цій грі (залежно від  $m$  та  $n$ )? Опишіть виграшну стратегію.

#### Розв'язання.

Якщо остачі від ділення чисел  $m$  та  $n$  на 4 різні, то Марійка може забезпечити собі перемогу. Для цього їй достатньо кожен раз забирати з тієї купки, де остача від ділення кількості кульок на 4 більша (на 1, 2 чи 3), таку кількість кульок, щоб вказані остачі в обох купках вирівнялись. Якщо спочатку такі остачі були однаковими, то переможе Іванко, дотримуючись описаної вище стратегії.

### 4. Розклад на множники.

Доведіть, що число  $\frac{44\dots488\dots853}{2012\ 2010}$  є складеним.

Подайте це число у вигляді добутку двох натуральних чисел так, щоб модуль різниці отриманих множників був найменшим можливим.

#### Розв'язання.

$$\frac{44\dots488\dots853}{2012\ 2010} = \frac{44\dots488\dots89}{2012\ 2011} - 36 =$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{4}{9} \cdot \frac{99\dots900\dots0}{2012\ 2012} + \frac{8}{9} \cdot \frac{99\dots90+1}{2011} \right) - 36 = \\ & = \left( \frac{4}{9} \cdot (10^{2012} - 1)10^{2012} + \frac{4}{9} \cdot (10^{2011} - 1)10 + 1 \right) - 36 = \\ & = \left( \frac{2 \cdot 10^{2012} + 1}{3} \right)^2 - 6^2 = \frac{2 \cdot 10^{2012} - 17}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^{2012} + 19}{3} = \\ & = \frac{66\dots661 \times 66\dots673}{2010\ 2010}. \end{aligned}$$

Отже, задане число — складене, а модуль різниці отриманих множників дорівнює 12.

Доведемо, що меншим він бути не може. Справді, при діленні заданого числа як на 3, так і на 4 отримуємо остачу 1. Це можливо, коли обидва множники розкладу як при діленні на 3, так і при діленні на 4 мають однакові остачі. А оскільки числа 3 та 4 — взаємно прості, то різниця таких множників ділиться на 12. Залишилось зауважити, що дорівнювати нулю вона не може, бо задане число закінчується цифрою 3, тому воно не є точним квадратом.

Аналогічний висновок отримаємо для всіх чисел вигляду

$$\frac{44\dots488\dots853}{n+1\ n-1}, \quad n \in N.$$

Зокрема, для  $n = 1$  це число  $4453 = 61 \times 73$ .

### 5. Про кількість розв'язків діофантового рівняння.

Для цілого невід'ємного числа  $n$  та натурального числа  $m$  позначимо через  $S_m(n)$  кількість усіх розв'язків рівняння  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = n$  у цілих числах  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (розв'язки  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  та  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  вважаються однаковими тоді і тільки тоді, коли  $u_k = v_k$  для всіх  $k = 1, 2, \dots, m$ ). Знайдіть суму

$$\sum_{i=-\lfloor \sqrt{n} \rfloor}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (n - (m+1)i^2) S_m(n - i^2).$$

#### Розв'язання.

Позначимо

$$\begin{aligned} \sigma_m(n) &= \sum_{i=-\lfloor \sqrt{n} \rfloor}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (n - (m+1)i^2) S_m(n - i^2) = \\ &= n \left( S_m(n) + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} S_m(n - i^2) \right) - 2(m+1) \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} i^2 S_m(n - i^2). \end{aligned}$$

Оскільки  $S_m(0) = 1$ , то для всіх  $m \in N$  отримаємо  $\sigma_m(0) = 0$ . Для  $n \in N$  розглянемо рівняння  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2 = n$ .

Кількість його розв'язків у цілих числах дорівнює сумі кількостей розв'язків у цілих числах кожного з рівнянь

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = n - x_{m+1}^2,$$

де  $x_{m+1}$  — довільне фіксоване ціле число з множини  $\{0, \pm 1, \dots, \pm \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ . Звідси випливає, що

$$S_{m+1}(n) = S_m(n) + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} S_m(n - i^2), \quad n \in N.$$

Покажемо, що

$$2(m+1) \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} i^2 S_m(n - i^2) = n S_{m+1}(n)$$

для всіх  $m \in N, n \in N$ .

Нехай  $n = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_p^2$  для деякого  $p = \overline{1, m+1}$ , де  $x_j, j = \overline{1, p}$  — різні натуральні числа. Таке представлення числа  $n$  породжує

$$S'_{m+1}(n) = 2^p (m+1) m \dots ((m+1) - (p-1))$$

розв'язків рівняння

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2 = n$$

у цілих числах. Для таких розв'язків маємо

$$\begin{aligned} 2(m+1) \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} i^2 S'_m(n - i^2) &= 2(m+1) \sum_{j=1}^p k_j^2 S'_m(n - k_j^2) = \\ &= 2(m+1) \sum_{j=1}^p k_j^2 \cdot 2^{p-1} m(m-1) \dots (m - (p-2)) = \\ &= n \cdot 2^p (m+1) m \dots ((m+1) - (p-1)) = n S'_{m+1}(n). \end{aligned}$$

Якщо деяке з чисел  $k_j$  повторюються  $q$  разів, то доведена рівність збережеться, але обидві її частини зменшаться в  $q!$  разів, враховуючи, що відповідні розміщення відбуваються з повтореннями. Підсумовуючи такі рівності за всіма можливими представленнями

$$n = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_p^2,$$

отримаємо

$$2(m+1) \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} i^2 S_m(n - i^2) = n S_{m+1}(n)$$

для всіх  $m \in N, n \in N$ .

З доведеного випливає, що  $\sigma_m(n) = 0$  для всіх  $m \in N, n \in Z_+$ . Тут і нижче  $Z_+$  — це множина всіх цілих невід'ємних чисел.

## 6. Обернення неперервності.

1. Про функцію  $f: Z \rightarrow Z$  відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому  $f(n) \rightarrow \infty$ , якщо  $n \rightarrow +\infty$ . Нехай  $f^{-1}$  позначає функцію, обернену до  $f$ . Чи можна стверджувати, що  $f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$ , якщо  $n \rightarrow +\infty$ ?

2. Про функцію  $F: R \rightarrow R$  відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і

є розривною в кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція  $F^{-1}$  також є розривною в кожній точці числової прямої?

### Розв'язання.

1. Не можна. Наприклад,

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in Z_+, \\ -n, & n = -2k+1, k \in N, \\ \frac{n}{2}, & n = -2k, k \in N. \end{cases}$$

Маємо  $f(n) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Але для функції

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 2k, n \in Z_+, \\ -n, & n = 2k-1, k \in N, \\ 2n, & n = -k, k \in N \end{cases}$$

виконується, що  $f^{-1}(n)$  для непарних  $n$  не прямує до  $+\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

2. Не можна. Виділимо у множині дійсних чисел підмножину  $X$  усіх чисел вигляду

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1, b_1 b_2 \dots b_m,$$

де  $m \in N, n \in N, a_i, b_j$  — цифри,  $b_m \neq 0, b_m \neq 5$ . Нехай

$$F(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in R \setminus X, \\ x-1, & x \in X \setminus (0, 2), \\ g(x), & x \in X \cap (0, 2). \end{cases}$$

Визначимо функцію  $g(x)$  на множині  $X \cap (0, 2)$  так:  $g(x) = \frac{1}{2}x$ , якщо  $b_m$  — парна цифра. Якщо цифра  $b_m = 1$  чи  $b_m = 3$ , то збільшимо її на 1, а якщо  $b_m = 7$  чи  $b_m = 9$ , то зменшимо її на 1.

Замінивши  $x \in X \cap (0, 2)$  на отриманий таким способом елемент  $x'$ , покладемо  $g(x) = \frac{1}{2}x$ . Функція  $y = F(x)$  є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і розривна у кожній точці цієї множини.

Але обернена до неї функція  $x = F^{-1}(y)$  неперервна в точці  $y = \frac{1}{3}$ .

## 7. Групи чисел.

Чи можна числа  $1, 2, \dots, 10^9 - 1$  розбити на 10 груп так, щоб сума восьмих степенів чисел у кожній групі була одна й та сама?

### Розв'язання.

Таке розбиття можливе. Для зручності приєднаємо до наявних чисел ще й число 0. У кожную групу  $A_m, m = \overline{0, 9}$  будемо включати ті числа від 0 до 999 999 999, сума цифр яких закінчується цифрою  $m$ . Покажемо, що таке розбиття задовольняє умову задачі. Для цього представимо кожне з чисел від 000 000 000 до 999 999 999 у вигляді

$$10^8 a_8 + 10^7 a_7 + 10^6 a_6 + 10^5 a_5 + 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0.$$

Для піднесення його до восьмого степеня необхідно перемножити дане число саме на себе 8 разів. Такий добуток складатиметься зі всіх можливих доданків

$$(10^8 a_8)^{k_8} (10^7 a_7)^{k_7} (10^6 a_6)^{k_6} (10^5 a_5)^{k_5} (10^4 a_4)^{k_4} \times \\ \times (10^3 a_3)^{k_3} (10^2 a_2)^{k_2} (10^1 a_1)^{k_1} (10^0 a_0)^{k_0},$$

де  $k_8 + k_7 + k_6 + k_5 + k_4 + k_3 + k_2 + k_1 + k_0 = 8$

Тому у кожному з таких доданків принаймні один зі степенів  $k_i$  дорівнює нулю. Якщо відповідну йому цифру  $a_i$  замінити на будь-яку іншу, то отримаємо рівний йому доданок, який входить у суму при піднесенні до восьмого степеня деякого числа з іншої групи  $A_m$ . При цьому різними замінами відповідатимуть різні групи. Звідси випливає, що суми восьми степенів чисел кожної групи однакові. Зрозуміло, що аналогічного висновку можна дійти щодо сум довільних натуральних степенів даних чисел від 1 до 8 включно.

Але вже для дев'ятих степенів така рівність не виконується.

Зауважимо, що для кожного натурального  $n \geq 2$  за аналогічним принципом числа 1, 2, ...,  $10^n - 1$  можна розбити на 10 груп так, щоб суми довільних натуральних степенів від 1 до  $n - 1$  чисел кожної групи були рівними.

### 8. Тригонометричний многочлен.

Яку найменшу кількість нулів на відрізку  $[-\pi; \pi]$  може мати функція вигляду

$$T(x) = a_{2012} \cos^3 2012x + a_{2011} \cos^3 2011x + \dots + a_{15} \cos^3 15x$$

(тут  $a_{15}, a_{16}, \dots, a_{2012}$  — деякі дійсні числа)?

#### Розв'язання.

Якщо  $a_{15} = 1$ , а решта коефіцієнтів многочлена дорівнюють нулю, то він матиме 30 нулів на відрізку  $[-\pi; \pi]$ . Покажемо, що меншою кількістю нулів бути не може. Надалі розглядатимемо лише ті нулі, в яких  $T(x)$  змінює свій знак на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ .

Зрозуміло, що число  $x = 0$  не входить до множини таких нулів.

Внаслідок парності функції  $T(x)$  їх можна представити у вигляді:

$$\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n.$$

Припустимо, що  $n \leq 14$ . Нехай

$$f_k(x) = \cos x + \beta_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Вибравши числа  $\beta_k$  так, щоб виконувалися рівності  $f_k(\pm x_k) = 0$ , розглянемо функцію

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x),$$

яка на інтервалі  $(-\pi; \pi)$  змінює свій знак у тих самих точках, що й многочлен  $T(x)$ . Тому неперервна, відмінна від тотожного нуля функ-

ція  $T(x) F(x)$  не змінює свого знака на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

Звідси випливає, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x) F(x) dx \neq 0.$$

З іншого боку, врахувавши рівності

$$\cos^3 \varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi}{4}$$

та

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

подамо  $T(x)F(x)$  у вигляді

$$b_{6036+n} \cos(6036+n)x + b_{6035+n} \cos(6035+n)x + \dots + b_{15-n} \cos(15-n)x.$$

Звідси для  $n \leq 14$  знаходимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x) F(x) dx \neq 0.$$

—

Отримана суперечність доводить, що  $n \geq 15$ , тобто навіть для тих нулів, в яких  $T(x)$  змінює свій знак на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ , є не менше за 30.

Зауважимо, що аналогічний висновок отримаємо й у випадку, якщо в многочлені  $T(x)$  замість кубів записати довільні непарні натуральні показники степенів.

### 9. Стильне облицювання.

Нехай  $m, n, k$  — натуральні числа. Внутрішню поверхню душової кімнати, яка утворює собою прямокутний паралелепіпед розміром  $m \times n \times k$ , було замовлено облицювати без прогалин (тобто стіни, підлогу, стелю і навіть двері) плиткою. Майстер-плиточник має чорні та білі плитки розміром  $1 \times 1$  і вважає облицювання стильним, якщо використана найбільша можлива кількість чорних плиток так, щоб жодні дві з них не дотикалися між собою сторонами (дотик кутами дозволяється, різати плитки не можна). Позначимо через  $F(m, n, k)$  кількість чорних плиток, яка потрібна для стильного облицювання душової кімнати.

1. Знайдіть  $F(5, 5, 5)$  та  $F(2012, 15, 15)$ .

2. Дослідіть величину  $F(m, n, k)$ .

#### Розв'язання.

1. Розфарбуємо кожну грань куба зі стороною 5 у три кольори, як у такій таблиці.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

У кожній вершині куба містяться три клітинки з цифрою 1. З них зафарбувати в чорний колір вдасться лише одну. Отже, зафарбованих у чорний колір клітинок з одиницею максималь-



но отримаємо 8. Далі, навколо кожної вершини маємо замкнений ланцюжок з дев'яти клітинок з двійками (по три двійки на кожній грані). З них зафарбувати у чорний колір можна не більше чотирьох клітинок. Разом на всій поверхні куба таких клітинок отримаємо не більше 32. Нарешті, на кожній грані маємо по 9 клітинок з трійками, з яких зафарбувати у чорний колір вдасться не більше п'яти. Якщо на деякій грані в чорний колір зафарбовано 5 таких клітинок, то це можна зробити єдиним способом. Але тоді на чотирьох сусідніх з нею через спільне ребро гранях чорних клітинок вийде не більше чотирьох, і лише на протилежній грані їх знову матимемо 5. Отже, отримаємо максимум 26 чорних клітинок з трійками. Всього — не більше 66 чорних клітинок. Рівно 66 чорних квадратиків матимемо, якщо не будемо фарбувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до вертикальних ребер куба на двох його протилежних гранях, а всі інші зафарбуємо у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. У результаті на двох гранях куба виявиться по 13, на двох — по 12 і на двох — по 8 чорних квадратиків. Разом — 66. Отже,

$$F(5, 5, 5) = 66 = \frac{S}{2} - 9,$$

де  $S = 150$  — площа повної поверхні куба з ребром 5.

Зауважимо, що міркуючи аналогічно для куба з ребром  $k = 2l - 1$  та розфарбувавши всі його грані аналогічним чином у  $l$  кольорів, отримаємо

$$F(k, k, k) = \frac{S}{2} - (2k - 1),$$

де  $S = 6k^2$  — площа повної поверхні куба з ребром  $k$ .

При збільшенні одного з вимірів такого куба зафарбувати в чорний колір нових квадратиків вдасться не більше, ніж половина доданої при цьому площі повної поверхні. Тому для  $m > k$  отримуємо

$$F(m, k, k) \leq \frac{S}{2} - (2k - 1).$$

Рівність досягається, якщо не зафарбовувати в чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до паралельних ребер паралелепіпеда з довжиною  $k$  на двох його протилежних квадратних гранях, а всі інші зафарбувати в шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику.

Для  $m = 2012$ ,  $k = 15$  будемо мати

$$F(m, k, k) = 60\,556 = \frac{S}{2} - 19,$$

де  $S = 121\,170$  — площа повної поверхні такого паралелепіпеда.

**2.** Нехай тепер маємо довільний прямокутний паралелепіпед розміром  $m \times n \times k$ , причому  $m \geq n \geq k$ ,  $k = 2l - 1$ .

Його можна отримати з куба з ребром  $k$ , збільшуючи при потребі послідовно два із вимірів куба. Оскільки при цьому кількість нових чорних квадратиків не перевищить половини доданої площі повної поверхні, то

$$F(m, n, k) \leq \frac{S}{2} - (2k - 1) = mn + mk + nk - (2k - 1).$$

Рівність досягається, якщо не зафарбовувати в чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до паралельних ребер паралелепіпеда з довжиною  $k$  на двох його протилежних квадратних гранях, а всі інші зафарбувати у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику.

Якщо  $m \geq n \geq k$ ,  $k = 2l$ , то розглянемо спочатку куб з ребром  $2l$  та зафарбуємо всі його грані у  $l$  кольорів, як у такій таблиці.

|     |     |     |   |   |     |     |     |
|-----|-----|-----|---|---|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | ... | / | / | ... | 2   | 1   |
| 2   | 2   | ... | / | / | ... | 2   | 2   |
| ... | ... | ... | / | / | ... | ... | ... |
| /   | /   | /   | / | / | /   | /   | /   |
| /   | /   | /   | / | / | /   | /   | /   |
| ... | ... | ... | / | / | ... | ... | ... |
| 2   | 2   | ... | / | / | ... | 2   | 2   |
| 1   | 2   | ... | / | / | ... | 2   | 1   |

Біля кожної з восьми вершин отримаємо замкнений ланцюжок з непарної кількості однакових цифр від 1 до  $l$ .

Зафарбувати в чорний колір на кожному такому ланцюжку вдасться не більше  $\frac{p-1}{2}$  клітинок, де  $p$  — кількість клітинок, які належать даному ланцюжку.

Тому для даного куба

$$F(m, k, k) \leq \frac{S}{2} - 2k = 3k^2 - 2k,$$

причому рівність досягається, якщо не зафарбовувати в чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до вертикальних ребер куба на двох його протилежних гранях, а всі інші зафарбувати в шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. Збільшуючи два з вимірів такого куба до  $m$  та  $n$  відповідно, для  $k = 2l$  отримаємо

$$F(m, n, k) = \frac{S}{2} - 2k = mn + mk + nk - 2k.$$

Остаточного маємо

$$F(m, n, k) = \begin{cases} mn + mk + nk - (2k - 1), & m \geq n \geq k, k = 2l - 1, \\ mn + mk + nk - 2k, & m \geq n \geq k, k = 2l, \end{cases}$$

де  $m, n, l \in \mathbb{N}$ .

## 10. Оцінка суми.

Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — довільні дійсні числа,

причому  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0$ . Доведіть, що

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left( n-1 + \left( 1-2 \cdot \frac{n(1-\mu)}{2} \right)^2 \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} x_i^2,$$

де  $\mu = \frac{1}{n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\{u\} = u - [u]$  — дробова

частина числа  $u$ .

### Розв'язання.

Нехай  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = m$ . Послідовно проводячи заміни

$$x_i = m y_i, |y_i| \leq 1; y_i = 1 - z_i, 0 \leq z_i \leq 2;$$

$$z_i = 2t_i, 0 \leq t_i \leq 1,$$

зведемо задану нерівність до нерівності

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_i^2) \geq \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \right\}^2, \quad 0 \leq t_i \leq 1.$$

Доведемо отриману нерівність методом математичної індукції.

Для  $n = 1$  вона перетворюється в очевидну рівність.

Припустимо справедливості такої нерівності для  $n = k$ . Введемо позначення

$$M_n = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \right\}, \quad \varepsilon_n = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \right\}$$

і для  $n = k+1$  розглянемо два можливі випадки:

1) якщо  $M_{k+1} = M_k$ , то  $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + t_{k+1}$  і

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (t_i - t_i^2) &= \sum_{i=1}^k (t_i - t_i^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) \geq \\ &\geq (\varepsilon_k - \varepsilon_k^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) \geq \\ &\geq (\varepsilon_k - \varepsilon_k^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) - 2\varepsilon_k t_{k+1} = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+1}^2. \end{aligned}$$

2) якщо  $M_{k+1} = M_k + 1$ , то  $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + t_{k+1} - 1$  і

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (t_i - t_i^2) &= \sum_{i=1}^k (t_i - t_i^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) \geq \\ &\geq (\varepsilon_k - \varepsilon_k^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) \geq \\ &\geq (\varepsilon_k - \varepsilon_k^2) + (t_{k+1} - t_{k+1}^2) - 2(1 - \varepsilon_k)(1 - t_{k+1}) = \\ &= \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+1}^2. \end{aligned}$$

З доведеного випливає справедливості отриманої нерівності для всіх  $n \in N$ .

Робочий момент півфіналу

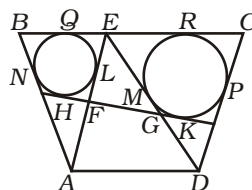
### 11. Спільна дотична.

Нехай  $E$  — довільна точка сторони  $BC$  квадрата  $ABCD$ . Доведіть, що вписані кола трикутників  $ABE$ ,  $CDE$ ,  $ADE$  мають спільну дотичну.

### Розв'язання.

Розглянемо загальнішу задачу. Нехай  $ABCD$  — опуклий чотирикутник,  $E$  — довільна точка на стороні  $BC$  (мал. 1).

Нехай  $HK$  — спільна дотична до кіл, вписаних у трикутники  $ABE$  та  $CDE$ . Щоб вона



Мал. 1

була дотичною і до кола, вписаного у трикутник  $ADE$ , необхідно і достатньо, щоб у чотирикутник  $AFGD$  можна було вписати коло. Враховуючи рівність відповідних відрізків дотичних, розглянемо різницю

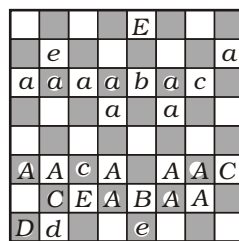
$$(AD + FG) - (AF + DG) = (AD + HK) - (AL + DM) = (AD + QR) - (AN + DP) = (AD + BC) - (AB + DC).$$

Щоб така різниця дорівнювала нулю, необхідно і достатньо, щоб у чотирикутник  $ABCD$  можна було вписати коло. Таким чином, вписані кола трикутників  $ABE$ ,  $CDE$ ,  $ADE$  матимуть спільну дотичну тоді і тільки тоді, коли чотирикутник  $ABCD$  описаний. Зокрема, це буде і у випадку, коли  $ABCD$  є квадратом.

### 12. Шаховий ребус.

На діаграмі (мал. 2) зображено позицію, яка могла б трапитися в шаховій партії. Білі фігури зашифровано великими літерами, а чорні — малими (усього 14 білих та 14 чорних фігур). Фігури однакового типу зашифровано однаковими буквами: наприклад,  $X$  — білий король,  $x$  — чорний король. Розшифруйте позицію.

(Складено спеціально для турніру міжнародним майстром з шахової композиції А. М. Фролкіним за мотивами творів А. М. Корнілова.)



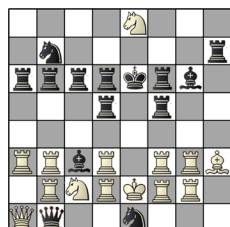
Мал. 2

### Розв'язання.

Спочатку відзначимо, що  $A$ ,  $a$  — не пішаки, бо з обох сторін збито по дві фігури, а на трьох вертикалях дошки є по дві фігури  $A$ , що вимагало би трьох боїв з боку білих. Отже,  $A$ ,  $a$  — однакові фігури, утворені після проходження пішаків до восьмої та першої горизонталей відповідно. Очевидно, що  $A$ ,  $a$  — не ферзі, бо їх могло утворитися максимум по 7. Для утворення по 8 таких фігур необхідно, щоб з обох сторін таке проходження здійснили як мінімум по 6 пішаків. Для цього знадобиться чотири взяття — по одному на кожній парі вертикалей  $a + b$ ,  $c + d$ ,  $e + f$ ,  $g + h$ . Оскільки цим вичерпується ліміт збитих фігур, то інших взяттів бути не могло, а в кожній парі вказаних вертикалей

по 3 пішаки перетворилися в однакові фігури, причому всі 3 на полях одного кольору. Звідси випливає, що  $A, a$  — не слони, бо у такому разі різниця між загальною кількістю слонів, які стоять на білих полях, і слонів, які стоять на чорних полях, мала би бути кратною трьом, а на дошці модуль такої різниці дорівнює 2. Отже, пішаків на дошці не залишилося взагалі.

По одній фігурі кожного кольору можуть бути лише ферзі та королі. Такими є лише  $B, b$  і  $D, d$ . Оскільки королі не можуть стояти на суміжних полях, то однозначно отримуємо:  $B, b$  — королі,  $D, d$  — ферзі. Оскільки обидва королі не можуть одночасно знаходитися під шахом, то  $E, e$  — не тури. Вони також — не слони, бо два  $E$  знаходяться на білих полях. Тому  $E, e$  — коні. Отже, слонами можуть бути Лише  $C, c$ , а тоді турами —  $A, a$ . Відновлена, дещо штучна, позиція виглядає так, як на мал. 3.



Мал. 3

### 13. Суми та біноміальні коефіцієнти.

Нехай  $k$  — задане натуральне число.

1. Знайдіть такі дійсні числа  $A_0(k), A_1(k), \dots, A_k(k)$ , що для всіх допустимих дійсних значень  $x$  справджується рівність

$$\frac{k!}{x(x+1)\dots(x+k)} \equiv \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + \dots + \frac{A_k(k)}{x+k}.$$

2. Для натуральних  $n \geq 2k$  знайдіть суму

$$S_n(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i C_{i+k}^k}.$$

3. Доведіть існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(k)$  та знайдіть її значення.

#### Розв'язання.

1. Такі числа існують згідно з теоремою про розклад відношення двох многочленів у суму найпростіших дробів — ця теорема вивчається в курсі математичного аналізу.

Для тих, хто незнайомий з цим твердженням, скажемо, що в даному випадку існування доводиться індукцією за  $k \geq 1$  з використанням рівності

$$\frac{1}{(x+i)(x+k+1)} = \frac{1}{k+1-i} \left( \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+k+1} \right), \quad i = \overline{0, k}.$$

Далі, для знаходження коефіцієнтів розкладу помножимо обидві частини тотожності

$$\frac{k!}{x(x+1)\dots(x+k)} \equiv \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + \dots + \frac{A_k(k)}{x+k}$$

на  $x+i$ ,  $i = \overline{0, k}$ .

Перейшовши в отриманій рівності до границі при  $x \rightarrow -i$ , знаходимо

$$A_i(k) = \lim_{x \rightarrow -i} \frac{k!(x+i)}{x(x+1)\dots(x+k)} = (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} = (-1)^i C_k^i, \quad i = \overline{0, k}.$$

$$\begin{aligned} 2. S_n(k) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i C_{i+k}^k} = \sum_{i=1}^n \frac{k!}{i(i+1)\dots(i+k)} = \\ &= (k-1)! \sum_{i=1}^n \frac{(i+k)-i}{i(i+1)\dots(i+k)} = \\ &= (k-1)! \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i(i+1)\dots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)\dots(i+k)} \right) = \\ &= (k-1)! \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{C_{n+k}^k} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що умова  $n \geq 2k$  виявилася зайвою.

3. Враховуючи результат пункту 2, отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(k) &= \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{C_{n+k}^k} \right) = \\ &= \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{k!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

### 14. Правильний тетраедр.

Чи можливо правильний тетраедр розрізати на декілька правильних тетраедрів?

#### Розв'язання.

Припустимо, що таке розрізання можливе. Тоді серед утворених при цьому частин знайдеться менший правильний тетраедр, одна з вершин якого збігається з вершиною початкового тетраедра, а три ребра, які виходять з цієї вершини, лежать на відповідних його ребрах. Розглянемо тупий кут між протилежною до даної вершини гранню меншого тетраедра та гранню вихідного тетраедра. Для розрізання необхідно, щоб двогранний кут правильного тетраедра вкладався у нього, а отже і у кут  $180^\circ$ , ціле число разів.

А оскільки косинус такого двогранного кута дорівнює  $\frac{1}{3}$ , то це неможливо, бо величина даного кута міститься між  $60^\circ$  і  $90^\circ$ . Отримана суперечність доводить неможливість розрізати правильний тетраедр на скінченну кількість менших правильних тетраедрів.

### 15. Надстепені та цікава функція.

Для заданого натурального  $n$  розглядаються всілякі числа вигляду  $a_1^{a_2 \dots a_k}$ , де  $1 \leq k \leq n$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Позначимо через  $g(n)$  найбільше серед таких чисел:

$g(1) = 1$ ,  $g(2) = 2$ ,  $g(3) = 3$ ,  $g(4) = 4$ ,  $g(5) = 9$ ,  $g(6) = 27$ ,  $g(7) = 512$  і т. д.

Знайдіть  $g(n)$ .

(Нагадаємо, що для додатних чисел  $a, b, c$  за означенням  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ .

Наприклад,  $2^{3^2} = 2^9 = 512$ .)

### Розв'язання.

Маємо:

$$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 2^2, g(5) = 3^2,$$

$$g(6) = 3^3, g(7) = 2^{3^2}.$$

Зауважимо, що

$$g(n) = \max\{1^{g(n-1)}, 2^{g(n-2)}, 3^{g(n-3)}, \dots, (n-1)^{g(1)}\}. (*)$$

Справді, яким би не було число  $a_1$ , найбіль-

ше значення виразу  $a_1^{a_2 \dots a_k}$  отримаємо, якщо  $a_2 \dots a_k = g(n - a_1)$ , і залишається тільки з цих найбільших значень вибрати максимальне.

**Лема.** Для кожного  $n \geq 6$  справедливі твердження:

$$a) g(n-1) > \log_2 3 \cdot g(n-2);$$

$$b) g(n+1) = 2^{g(n-1)}.$$

**Доведення леми.** З нерівностей

$$2^{1.5} < 3 < 2^2$$

впливає, що

$$1.5 < \log_2 3 < 2.$$

Тому для  $n = 6$  обидва твердження леми виконуються:

$$g(5) = 9 > 2 \cdot 4 > \log_2 3 \cdot g(4);$$

$$g(7) = 512 = 2^9 = 2^{g(5)}.$$

Припустимо їх справедливості для всіх  $n = \overline{6, k}$ .

Тоді з врахуванням зробленого припущення та рівності (\*) для  $n = k + 1$  отримаємо

$$\begin{aligned} g(k) &= 2^{g(k-2)} > 3^{g(k-3)} = 2^{\log_2 3 \cdot g(k-3)} = \\ &= (2^{g(k-3)})^{\log_2 3} = (g(k-1))^{\log_2 3} = (g(k-1))^{\log_2 3-1} g(k-1) > \\ &> (g(k-1))^{0.5} g(k-1) \geq 3g(k-1) > \log_2 3 \cdot g(k-1). \end{aligned}$$

Далі відзначимо, що функція

$$f(t) = \log_t(t+1) = \frac{\ln(t+1)}{\ln t}$$

спадає на проміжку  $[2; +\infty)$ , бо

$$f'(t) = \frac{\frac{\ln t}{t+1} - \frac{\ln(t+1)}{t}}{\ln^2 t} = \frac{t \cdot \ln t - (t+1) \ln(t+1)}{t(t+1) \ln^2 t} < 0, t \geq 2.$$

Звідси випливає, що

$$\log_2 3 > \log_2 4 > \dots > \log_m(m+1) > \dots$$

Тому, з врахуванням зроблених припущень та доведеної вище нерівності, отримуємо

$$\begin{aligned} 2^{g(k)} &> 2^{\log_2 3 \cdot g(k-1)} = 3^{g(k-1)} > 3^{\log_2 3 \cdot g(k-2)} > \\ &> 3^{\log_3 4 \cdot g(k-2)} = 4^{g(k-2)} > \dots > (k+1)^{g(1)}. \end{aligned}$$

Оскільки також

$$2^{g(k)} > 1 = 1^{g(k+1)},$$

то звідси і рівності (\*) випливає, що

$$g(k+2) = 2^{g(k)}.$$

Отже, обидва твердження леми будуть справедливими для всіх  $n \geq 6$ .

Лема доведена.

Підсумовуючи сказане, отримуємо:

$$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 4 = 2^2,$$

$$g(2k-1) = 2^{\dots 2^{3^2}}, g(2k) = 2^{\dots 2^{3^3}}, k \geq 3, \text{ причому у фрагменті } 2^{\dots 2^2} \text{ двох останніх рівностей використано } k-3 \text{ двійки.}$$

### 16. Надстепені та подільність.

1. Нехай  $k$  — задане натуральне число. Знайдіть  $D_k$  — найбільший спільний дільник усіх чисел вигляду  $m^m - m^m$  де  $m \in N, m \geq k$ .

2. Для заданого натурального  $a$  розглянемо послідовність  $\{u_n(a)\}_{n \geq 1} : u_1(a) = a, u_{n+1}(a) = a^{u_n(a)}, n \geq 1$ . Доведіть, що  $w_n(a) = u_n(a) - u_{n-1}(a)$  для довільного  $a \in N$  ділиться без остачі на  $n!$  для всіх натуральних  $n \geq 2$ .

### Розв'язання.

1. Позначимо

$$\begin{aligned} a_m &= m^m - m^m = m^m (m^{m-m} - 1) = \\ &= m^m (m^{m(m-1)-1} - 1), m \in N. \end{aligned}$$

Безпосередньо обчислюємо  $a_1 = 0, a_2 = 12$ . Доведемо, що  $a_m : 96$  для всіх  $m \geq 3$ . За рахунок множника  $m^m$  отримуємо  $a^m : 4^4 = 256$  для  $m = 4$  та  $a_m : 2^6 = 64$  для парних  $n \geq 6$ . Також

$$k = m^{m-1} - 1 = \left(m^{\frac{m-1}{2}} - 1\right) \left(m^{\frac{m-1}{2}} + 1\right) : 8$$

як добуток сусідніх парних натуральних чисел для непарних  $m \geq 3$ . Тому

$$\begin{aligned} m^{m(m-1)-1} - 1 &= \left(m^{\frac{mk}{8}} - 1\right)^8 - 1 = l^8 - 1 = \\ &= (l-1)(l+1)(l^2+1)(l^4+1) : 32 \end{aligned}$$

(при непарному  $m$ , а з ним і  $l$ , тут всі чотири останні множники парні, а з перших двох із них — один ділиться на 4). Таким чином,  $a_m : 32$  для всіх  $m \geq 3$ . Покажемо, що також  $a_m : 3$ . Для  $m = 3n$  це очевидно. А для  $m = 3n \pm 1$  враховуючи парність добутку  $m(m^{m-1} - 1)$ , така подільність випливає з рівності

$$(3n \pm 1)^{m(m-1)-1} \equiv 1 \pmod{3}.$$

І оскільки числа 32 та 3 — взаємно прості, то  $a_m : 96$  для всіх  $m \geq 3$ .

Покажемо тепер, що існують як завгодно великі  $m$ , для яких  $a_m$  не ділиться на 64, та як завгодно великі  $m$ , для яких  $a_m$  не ділиться на 9. Справді,  $2^{18} \equiv 1 \pmod{9}$ , тому для  $m = 18n + 2$  отримуємо

$$a_m = (18n+2)^{18n+2} \left( (18n+2)^{(18n+2)} ((18n+2)^{18n+1} - 1) - 1 \right) \equiv$$



$$\equiv 2^2 \left( 2^{2(2^1-1)} - 1 \right) \pmod{9} \equiv 3 \pmod{9}.$$

А оскільки  $3^{64} \equiv 1 \pmod{64}$ , то для  $m = 64n + 3$  будемо мати

$$\begin{aligned} a_m &= (64n+3)^{64n+3} \left( (64n+3)^{(64n+3)} ((64n+3)^{64n+2} - 1) - 1 \right) \equiv \\ &= 3^3 \left( 3^{3(3^2-1)} - 1 \right) \pmod{64} \equiv 32 \pmod{64}. \end{aligned}$$

І, нарешті, доведемо, що для кожного простого числа  $p > 3$  існують як завгодно великі  $m$ , для яких  $a_m$  не ділиться на  $p$ . Оскільки  $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , то

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}, \quad 2^{pk} \equiv 2^k \pmod{p}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Також  $2^s \equiv 1 \pmod{p}$ , звідки  $s \equiv (p-1)$ . Покладемо  $m = (p-1)pn + 2$ . Враховуючи, що  $m^n = ((p-1)pn + 2)^{(p-1)pn + 2}$  не ділиться на  $p$ , розглянемо вираз

$$\begin{aligned} m^{m(m^{m-1}-1)} - 1 &= \\ ((p-1)pn + 2)^{((p-1)pn + 2)((p-1)pn + 2)^{(p-1)pn + 1} - 1} &\equiv \\ \equiv \left( 2^{2(2^{(p-1)pn + 1} - 1)} - 1 \right) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Для його подільності на просте число  $p$  необхідно і достатньо, щоб числа  $s = 2(2^{(p-1)pn + 1} - 1)$  ділились на  $(p-1)$ . Оскільки  $s \equiv 2 \pmod{4}$ , то для  $p \equiv 1 \pmod{4}$  це неможливо. А для інших простих чисел  $p > 3$  розглянемо довільний простий непарний дільник  $q$  числа  $p-1$ . Для подільності  $s$  на  $q$  необхідно і достатньо, щоб непарне число  $(p-1)pn + 1$  ділилось на парне число  $q-1$ , що, очевидно, є неможливим.

Підсумовуючи сказане вище, отримуємо:

$$D_1 = D_2 = 12, \quad D_k = 96, \quad k \geq 3.$$

**2.** Доведемо твердження задачі методом математичної індукції.

Для  $n = 2$  маємо  $w_2 = a^a - a : 2!$ .

Для  $n = 3$  згідно з пункту 1 отримуємо  $w_3 = a^a - a^a : 3!$ .

Нескладно переконатися, що  $w_4 : 4!$ .

Подільність на 3 доводимо так само, як для  $w_3$ , а подільність на 8 для непарних  $a$  буде обґрунтована нижче. Припустимо також, що  $w_n : n!$  для всіх  $n$  таких, що  $2 \leq n \leq k$ ,  $k \geq 4$ . Покажемо, що у такому разі  $w_{k+1} : (k+1)!$

Нехай

$$\begin{aligned} k! &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m}, \\ k+1 &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_m^{\beta_m}, \end{aligned}$$

причому, якщо якесь з цих чисел не ділиться на котресь  $p_i$ , то відповідний степінь  $\alpha_i$  чи  $\beta_i$  дорівнює 0, але  $x_i = \alpha_i + \beta_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тоді

$$(k+1)! = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_m^{x_m}.$$

Доведемо, що  $w_{k+1} : p_i^{x_i}$  для всіх  $i = \overline{1, m}$ . Для цього запишемо  $w_{k+1}$  у вигляді

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= a^{u_{k-1}} - a^{u_{k-1}} = a^{u_{k-1}} \left( a^{u_{k-1} - u_{k-1}} - 1 \right) = \\ &= a^{u_{k-1}} (a^{w_k} - 1). \end{aligned}$$

Оскільки  $w_{k+1} : a^{u_{k-1}}$ , то у випадку  $a : p_i$  розглянемо  $a^{u_{k-1}} = a^{u_{k-1} - u_{k-2}} a^{u_{k-2}} = a^{w_{k-1}} a^{u_{k-2}}$ .

Враховуючи зроблене припущення, маємо:

$$a^{u_{k-2}} : p_i^{\alpha_i} \quad \text{та} \quad w_{k-1} : (k-1)!.$$

А оскільки  $(k-1)! > (k+1) \geq p_i^{\beta_i} > \beta_i$  для  $k \geq 4$ , то  $a^{w_{k-1}} : p_i^{\beta_i}$ . Тому  $w_{k+1} : p_i^{x_i}$ .

Якщо ж  $a$  не ділиться на  $p_i$ , то достатньо довести, що  $(a^{w_k} - 1) p_i^{x_i}$ . Для доведення зауважимо, що

$$\begin{aligned} x_i &= \left[ \frac{k+1}{p_i} \right] + \left[ \frac{k+1}{p_i^2} \right] + \dots + \left[ \frac{k+1}{p_i^n} \right] + \dots < \\ < (k+1) \left( \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots + \frac{1}{p_i^n} + \dots \right) = \\ &= (k+1) \frac{\frac{1}{p_i}}{1 - \frac{1}{p_i}} = \frac{k+1}{p_i - 1}. \end{aligned}$$

Для  $p_i = 2$  звідси отримаємо, що  $x_i \leq k$ . Доведемо, що  $w_{k+1} : 2^k$  для всіх непарних  $a$ . Для  $k = 1$  це очевидно. А, припускаючи, що  $w_k : 2^{k-1}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} a^{w_k} - 1 &= a^{q \cdot 2^{k-1}} - 1 = (a^q)^{2^{k-1}} - 1 = b^{2^{k-1}} - 1 = \\ &= (b-1)(b+1) \left( b^{2^1} + 1 \right) \left( b^{2^2} + 1 \right) \dots \left( b^{2^{k-2}} + 1 \right) : 2^k \end{aligned}$$

для кожного непарного  $b = a^q$ . Тому також  $w_{k+1} : 2^k$  для всіх непарних  $a$ .

Нехай тепер  $p_i > 2$ . За теоремою Ойлера для доведення подільності  $(a^{w_k} - 1) p_i^{\alpha_i + \beta_i}$  достатньо довести, що  $w_k : \varphi(p_i^{\alpha_i + \beta_i}) = p_i^{\alpha_i + \beta_i - 1} (p_i - 1)$ . Тут  $\varphi$  — це функція Ойлера,  $\varphi(n)$  — кількість натуральних чисел, менших за  $n$  та взаємно простих з  $n$ .

Розглянемо кілька випадків:

1)  $k+1 = p_i$ . Тоді  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i = 1$ ,  $p_i - 1 = k$ ,  $\varphi(p_i^{\alpha_i + \beta_i}) = k$ . Оскільки за припущенням

$$w_k : k!, \quad \text{то} \quad w_k : \varphi(p_i^{\alpha_i + \beta_i});$$

2)  $\beta_i = 0$ . Тоді  $w_k : \varphi(p_i^{\alpha_i + \beta_i}) = p_i^{\alpha_i + \beta_i - 1} (p_i - 1)$ .

Тому з припущення  $w_k : k!$  отримаємо, що  $w_k : p_i^{\alpha_i} (p_i - 1)$ , а отже, також  $w_k : \varphi(p_i^{\alpha_i + \beta_i});$

3) у всіх інших випадках будемо мати  $k+1 \leq 2p_i \Rightarrow k \geq p_i + (p_i - 1) > p_i$ . Тому  $\alpha_i \geq 1$ ,  $x_i \geq 2$ . Зауважимо також, що для  $p_i > 2$  звідси випливає

$$k > \frac{1}{p_i - 2} + p_i - 1, \quad k > \frac{k+1}{p_i - 1} + p_i - 2,$$

$$k > x_i + p_i - 2, \quad k - x_i + 2 > p_i.$$

Оскільки за припущенням

$$w_{k-x_i+2} : (k-x_i+2)!,$$

$$a \quad (k-x_i+2)! : p_i(p_i-1) = \varphi(p_i^2),$$

$$\text{то } w_{k-x_i+2} : \varphi(p_i^2).$$

$$\text{Звідси за теоремою Ойлера } (a^{w_{k-x_i+2}} - 1)p_i^2,$$

тобто  $w_{k-x_i+3} : p_i^2$ . Якщо при цьому  $x_i \geq 3$ , то, враховуючи зроблене припущення, матимемо також  $w_{k-x_i+3} : (p_i-1)$ . Далі, міркуючи аналогічно, послідовно отримаємо

$$w_{k-x_i+4} : p_i^3, \quad w_{k-x_i+5} : p_i^4, \quad \dots, \quad w_k : p_i^{x_i-1},$$

$$w_{k+1} : p_i^{x_i}.$$

Отже, нами доведено, що  $w_{k+1} : p_i^{x_i}$  для всіх  $p_i$ ,  $i=1, m$ . Це означає, що

$$w_{k+1} : p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_m^{x_m} = (k+1)!.$$

### 17. Функціональне рівняння.

Для натурального  $k$  знайдіть усі такі функції  $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , що для будь-яких додатних чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$  добуток яких дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^k \frac{f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{x_{2i-1} + x_{2i}} = 1.$$

#### Розв'язання.

Розглянемо спочатку випадок  $k \geq 2$ . Підставляючи  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$ , отримуємо  $f^n(1) = 1$ .

А оскільки  $f(x)$  набуває лише додатних значень, то  $f(1) = 1$ .

Підставимо тепер

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$x_3 = x_4 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1.$$

Враховуючи, що  $f(1) = 1$ , отримаємо рівність

$$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}.$$

$$\text{Далі, покладаючи } x_1 = a, \quad x_3 = \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad a \neq$$

1, та залишаючи решту аргументів одиницями, будемо мати:

$$(f(a)+1)\left(f\left(\frac{1}{a}\right)+1\right) = (a+1)\left(\frac{1}{a}+1\right),$$

$$\text{звідки одержимо } f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

$$\text{Отже, } f(a) = a \text{ або } f(a) = \frac{1}{a}.$$

Припустимо, що для відмінних від одиниці додатних чисел  $a, b$  одночасно виконуються рівності

$$f(a) = a, \quad f(b) = \frac{1}{b}.$$

$$\text{Тоді } f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}, \quad f\left(\frac{1}{b}\right) = b.$$

Підставивши  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = \frac{1}{a}, x_4 = \frac{1}{b}$ , та залишаючи решту аргументів одиницями, отримаємо співвідношення

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

звідки  $ab + 1 = a + b$ , тобто  $(a-1)(b-1) = 0$ , що неможливо при  $a \neq 1, b \neq 1$ .

З доведеного вище випливає, що розв'язками заданого функціонального рівняння при  $k \geq 2$  можуть бути лише функції

$$f(x) = x \text{ та } f(x) = \frac{1}{x}.$$

Перевірка показує, що вони обидві задовольняють це рівняння.

Нехай тепер  $k = 1$ . Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо:

$$f(1) = 1 \text{ та } f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Отже, для функції  $g(x) = f(x) - x$  будемо мати:

$$g(1) = 0 \text{ та } g(a) + g\left(\frac{1}{a}\right) = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Якщо  $g(x)$  — довільна функція, визначена на інтервалі  $(0; 1)$ , яка задовольняє на ньому нерівності

$$-x < g(x) < \frac{1}{x},$$

то, покладаючи

$$g(1) = 0 \text{ та } g(x) = -g\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 1,$$

отримаємо, що функція

$$f(x) = g(x) + x$$

є розв'язком заданого функціонального рівняння при  $k = 1$ .

Навпаки, для кожного розв'язку  $f(x) > 0$  функція  $g(x) = f(x) - x$  задовольняє накладені на неї вище умови.

При цьому нерівність

$$g(x) > -x, \quad x \in (0; 1),$$

очевидна, а нерівність

$$g(x) < \frac{1}{x}, \quad x \in (0; 1),$$

впливає з нерівності

$$-g(x) + \frac{1}{x} = g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \quad x \in (0; 1).$$

Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при  $k = 1$ . Зокрема, покладаючи

$$g(x) = 0 \text{ та } g(x) = \frac{1}{x} - x,$$

матимемо отримані нами для  $k \geq 2$  розв'язки  $f(x) = x$  та  $f(x) = \frac{1}{x}$  відповідно. Але, крім них,

при  $k = 1$  задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0; 1), \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Зрозуміло, що існує безліч розв'язків для  $k = 1$ .

**18. Рівень життя та політичні технології.**

Політтехнологи президента країни Олімпія отримали завдання переконати виборців щодо монотонного покращення ситуації в країні впродовж останніх 5 років його перебування при владі. Для цього політтехнологам надали заповнену натуральними числами таблицю розміром  $3 \times 5$  з економічними показниками  $P, Q, R$  за останні 5 років. Політтехнологи мають право будь-які числа таблиці (у тому числі — жодного або ж усі) збільшити на одиницю, після чого скласти інтегральний показник  $aP + bQ + cR$ , обравши дійсні коефіцієнти  $a, b, c$  на свій розсуд. Чи завжди вони зможуть виконати поставлене завдання, тобто зробити так, щоб вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав?

**Розв'язання.**

Не завжди. Нехай отримана політтехнологом таблиця має такий вигляд.

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
| $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ | $Q_5$ |
| $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |

Тоді утворені ним інтегральні показники за 5 років будуть такими:

$$I_k = aP_k + bQ_k + cR_k, \quad k = \overline{1; 5}.$$

Для їх щорічного зростання необхідно, щоб всі прирости  $\Delta_k = I_{k+1} - I_k$ ,  $k = \overline{1; 4}$ , були додатними. Позначимо

$$u_k = P_{k+1} - P_k, \quad v_k = Q_{k+1} - Q_k, \quad w_k = R_{k+1} - R_k, \quad k = \overline{1; 4}.$$

Тоді

$$\Delta_k = au_k + bv_k + cw_k = (a, b, c) \cdot (u_k, v_k, w_k), \quad k = \overline{1; 4}.$$

Отже, додатними повинні бути скалярні добутки векторів  $(a, b, c)$  та  $(u_k, v_k, w_k)$ ,  $k = \overline{1; 4}$ , і вектор  $(a, b, c)$  має утворювати гострий кут з кожним із векторів  $(u_k, v_k, w_k)$ ,  $k = \overline{1; 4}$ .

Покажемо, що досягти цього вдасться не завжди. Нехай координати таких векторів задані таблицею

|       |     |      |      |      |
|-------|-----|------|------|------|
| $k$   | 1   | 2    | 3    | 4    |
| $u_k$ | $n$ | $n$  | $-n$ | $-n$ |
| $v_k$ | $n$ | $-n$ | $n$  | $-n$ |
| $w_k$ | $n$ | $-n$ | $-n$ | $n$  |

Геометрично це означає, що вказані вектори виходять з центра  $O$  правильного тетраедра до чотирьох його вершин  $A, B, C, D$ . Але, яким би не був вектор  $(a, b, c)$  з початком у точці  $O$ , він буде напрямлений в один з чотирьох однакових тетраедрів  $OABC, OABD, OACD, OBDC$ , а отже, утворить тупий кут принаймні з одним із векторів  $(u_k, v_k, w_k)$ . Не допоможе політтехнологу і право збільшувати окремі показники на оди-

ницю, бо при достатньо великих значеннях  $n \in N$  в отриманому при цьому тетраедрі  $A_1B_1C_1D_1$  кути між векторами  $OA_1, OB_1, OC_1, OD_1$  мало відрізнятимуться від кутів між векторами  $OA, OB, OC, OD$ . Тому кут між будь-яким вектором  $(a, b, c)$  і принаймні одним з векторів  $OA_1, OB_1, OC_1, OD_1$  виявиться тупим.

**Завдання олімпіади**

**1.** Уздовж річки розташовані причали  $A, B, \Gamma$  (саме  $B$  такому порядку). Від  $B$  до  $A$  теплохід пливе 1 год, від  $B$  до  $\Gamma$  — теж 1 год, а від  $B$  до  $\Gamma$  — 2 год. В якому напрямку тече річка — від  $A$  до  $\Gamma$  чи від  $\Gamma$  до  $A$ ? Відповідь обґрунтуйте.

**2.** Розв'яжіть рівняння

$$15 - x = \frac{\sqrt{x-15}}{x}.$$

**3.** Знайдіть хоча б одну трійку натуральних чисел  $x, y, z$ , для яких виконується рівність  $x^3 + y^4 = z^5$ .

Скінченною чи нескінченною є множина таких трійок? Відповідь обґрунтуйте.

**4.** Для сторін  $a, b, c$  довільного трикутника  $ABC$  доведіть нерівності

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

**5.** Для кожного натурального числа  $n \geq 4$  розріжте квадрат зі стороною 1 на  $n$  прямокутників, периметр кожного з яких дорівнює 2.

**6.** У трикутнику  $ABC$  кут  $C$  дорівнює  $108^\circ$ . На стороні  $AB$  цього трикутника зовні нього побудований правильний п'ятикутник  $ABCDP$  із центром  $O$ . Доведіть, що  $CO$  — бісектриса кута  $ABC$ .

**Відповіді та розв'язання**

**1. Відповідь.** Від  $\Gamma$  до  $A$ .

Оскільки від  $B$  до  $\Gamma$  теплохід пливе 2 год., від  $B$  до  $\Gamma$  — 1 год.,  $B$  міститься між  $B$  та  $\Gamma$ , то від  $B$  до  $A$  теплохід пливе 1 год. Враховуючи, що від  $B$  до  $A$  теплохід пливе також 1 год, а відстань від  $B$  до  $A$  більша, ніж відстань від  $B$  до  $B$ , доводимо висновку, що від  $B$  до  $A$  теплохід пливе за течією. Тому річка протікає від  $\Gamma$  до  $A$ .

**2. Відповідь.** 15.

Справді, враховуючи ОДЗ, отримаємо, що  $x \geq 15$ . Але якщо  $x > 15$ , то ліва та права частини рівняння набувають різних за знаками значень.

**3. Відповідь.** Така множина є нескінченною. Числа  $x_n = 2^8 n^{20}$ ,  $y_n = 2^6 n^{15}$ ,  $z_n = 2^5 n^{12}$  задовольняють задану рівність при кожному натуральному значенні  $n$ .

**4.** Перша нерівність

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

справедлива, бо вона рівносильна правильному співвідношенню

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Для доведення другої нерівності запишемо нерівності трикутника:

$$a + b > c, b + c > a, c + a > b.$$

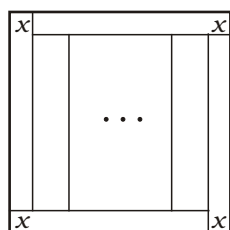
Звідси

$$(a + b)c > c^2, (b + c)a > a^2, (c + a)b > b^2.$$

Додавши ці нерівності, отримуємо шукану нерівність.

5. Для  $n = 4$  достатньо розрізати заданий квадрат на 4 менші квадрати зі сторонами 0,5.

Для  $n \geq 5$  розрізання показано на мал.4.



Мал. 4

Периметр кожного з чотирьох зовнішніх прямокутників дорівнює 2 для довільного  $x \in (0; 0,5)$ . Виберемо  $x$  так, щоб внутрішній квадрат зі стороною  $1 - 2x$  можна було розрізати на  $n - 4$  однакові прямокутники з периметром 2. Тоді

$$\left(1 - 2x + \frac{1 - 2x}{n - 4}\right) = 1,$$

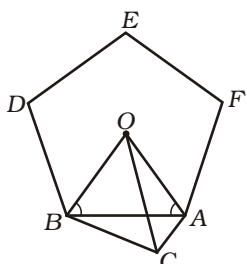
$$x = \frac{1}{2(n - 3)}.$$

6. Оскільки п'ятикутник  $ABDEF$  правильний, то (мал. 5)

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\angle ABO = \angle BAO,$$

$$\angle ACB + \angle AOB = 180^\circ.$$



Мал. 5

Тоді навколо чотирикутника  $ACBO$  можна описати коло. За властивістю вписаних кутів отримаємо  $\angle BCO = \angle BAO = \angle ABO = \angle ACO$ , що й слід було довести.

### Завдання фінального математичного бою

1. Доведіть, що будь-яку рівнобічну трапецію з перпендикулярними діагоналями можна розрізати на чотири подібні опуклі чотирикутники щонайменше трьома різними способами.

#### Розв'язання.

Перший спосіб. Довільну трапецію  $ABCD$  зі сторонами  $AD = a$ ,  $BC = b$  можна спочатку розрізати на дві подібні трапеції, провівши паралельно до основ відрізок  $EF = \sqrt{ab}$ . Після цього

за цим самим принципом кожен з нових двох трапецій розрізаємо на дві подібні.

Другий спосіб. Якщо трапеція  $ABCD$  рівнобічна, то проводимо відрізок  $EF$ , описаний у 1-му способі, а потім сполучаємо середини основ. Утворилися чотири подібні трапеції.

Третій спосіб. Нехай трапеція задовольняє умову задачі. З точки перетину діагоналей опускаємо перпендикуляри на всі сторони трапеції. Цими перпендикулярами трапеція розрізається на 4 подібні опуклі чотирикутники.

2. Знайдіть найменше можливе значення виразу

$$x^3 + x^2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} \text{ для } x > 0.$$

#### Розв'язання.

Групуємо доданки й оцінюємо відповідні суми за нерівністю Коші:

$$x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \geq 3,$$

рівність досягається при  $x = 1$ ;

$$x^3 + \frac{3}{2x^2} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \geq$$

$$5\sqrt[5]{\left(\frac{x^3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^3} = \frac{5}{2},$$

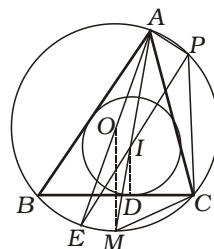
рівність досягається також при  $x = 1$ . Отже, в точці  $x = 1$  вихідний вираз набуває найменшого значення, що дорівнює 5,5.

**Відповідь.** 5,5.

3. У трикутнику  $ABC$  ( $AB > AC$ ) вписане коло з центром у точці  $I$  дотикається сторони  $BC$  у точці  $D$ . Бісектриса кута  $BAC$  вдруге перетинає описане коло трикутника  $ABC$  у точці  $M$ , а пряма  $MD$  перетинає вдруге це саме коло в точці  $P$ . Доведіть, що  $\angle API = 90^\circ$ .

#### Розв'язання.

Нехай  $AE$  — діаметр описаного кола трикутника  $ABC$ , і точка  $O$  — центр цього кола (мал. 6).



Мал. 6

Оскільки  $\angle MPC = \angle DCM = \frac{1}{2} \angle BAC$ , то трикутники  $PMC$  і  $CMD$  подібні і  $MC^2 = MD \cdot MP$ . За теоремою про «тризуб» (див. с. 12 книжки В. Ясінського «Олімпіадні задачі з геометрії: навч.-метод. посіб.» (К.: Шкільний світ, 2008)) виконується рівність  $MI = MC$ . Маємо:



$$MP^2 = MC^2 = MD \cdot MP, \quad \frac{MI}{MP} = \frac{MD}{MI}.$$

Звідси випливає, що подібними будуть і трикутники  $IMP$  та  $DMI$ , і тому  $\angle MID = \angle MPI$ . Оскільки  $OM \perp ID$ , то

$$\angle OAM = \angle OMA = \angle MID, \\ \angle EPM = \angle OAM = \angle MID = \angle IPM.$$

Тому точки  $E, I, P$  лежать на одній прямій. Отже,  $\angle API = \angle APE = 90^\circ$ .

**4.** Знайдіть усі такі трійки простих чисел  $p, q$  і  $r$ , для яких виконується рівність  $p + q^2 + r^3 = pr^3$ .

**Розв'язання.**

Розглянемо випадки, коли хоча б одне з цих чисел парне і коли всі вони непарні.

а)  $p = 2, r^3 = q^2 + 2$ . Якщо  $r = 3$ , то  $q = 5$ . Нехай  $r \neq 3$ . Тоді  $q = 3$  не дає розв'язку. Тому в цьому випадку  $r, q$  не діляться на 3.

Маємо  $q^2 \equiv 1 \pmod{3}, r^3 \equiv 0 \pmod{3}$ . Отже,  $r$  ділиться на 3. Отримали суперечність.

б)  $r = 2, q^2 + 8 = 7p, q^2 \equiv 6 \pmod{7}$ , що неможливо при цілому  $q$ .

в)  $q = 2, p, r$  непарні, тоді ліва частина рівняння парна, а права непарна. Отримали суперечність.

г) Нехай усі три числа непарні. Маємо  $(p-1)(r^3-1) = q^2 + 1$ .

Ліва частина кратна 4, а права частина дає остачу 2 при діленні на 4. Знову отримали суперечність.

Отже, рівняння має єдиний розв'язок, знайдений у пункті а).

**Відповідь.**  $p = 2, r = 3, q = 5$ .

**5.** Знайдіть усі такі функції  $f: R \rightarrow R$ , що для будь-яких  $x \in R$  та  $y \in R$  виконується рівність

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) \left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

**Розв'язання.**

Для  $y = -1$  маємо

$$f(f(-1)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) \left(f(-1) + \frac{1}{2}\right).$$

Якщо  $f(-1) \neq -\frac{1}{2}$ , то функція  $f$  є сталою, що, як легко перевірити, неможливо. Отже,  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ , і тому  $f(f(-1)) = 0$ .

З останніх двох рівностей випливає, що

$$f(f(-1)) = f\left(-\frac{1}{2}\right), \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Підставимо до вихідної рівності  $x = 0$  та  $y = -\frac{1}{2}$  і отримаємо:

$$f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(f(0) + \frac{1}{2}\right) \left(f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right),$$

$$f(0) = \left(f(0) + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

Припустимо, що для деякого  $y_0 \neq -1$   $f(y_0) = -\frac{1}{2}$ . Тоді для всіх  $x \in R$  маємо:

$$f\left(x\left(y_0 + 1\right) - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

тобто  $f(u) = 0$  на  $R$ , що неможливо.

Ми встановили, що  $x = -1$  — єдиний корінь рівняння  $f(x) = -\frac{1}{2}$ .

Доведемо тепер, що  $x = -\frac{1}{2}$  — єдиний корінь рівняння  $f(x) = 0$ .

Нехай  $f(a) = 0$ . Тоді для  $x = a - \frac{1}{2}$  та  $y = 0$  дістанемо:

$$f\left(a - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(f\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(a - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Отже,  $a - \frac{1}{2} = -1, a = -\frac{1}{2}$ .

Підставимо до вихідної рівності  $x = -1$ .

Маємо:

$$f(-1 - y + f(y)) = 0.$$

І тому  $-1 - y + f(y) = -\frac{1}{2}$ , тобто  $f(y) = y + \frac{1}{2}$  для всіх дійсних  $y$ . Залишається зробити перевірку.

Отже,  $f(x) = x + \frac{1}{2}$ , де  $x$  — дійсне число.

**Відповідь.**  $f(x) = x + \frac{1}{2}$ .

**6.** Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел  $a, b$  і  $c$ , що задовольняють умову  $ab + bc + ca \leq 1$ , виконується нерівність

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left( \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right).$$

**Розв'язання.**

Маємо

$$a^2 + 1 \geq a^2 + ab + bc + ca \geq 4a\sqrt{bc}.$$

Отже,  $2\sqrt{bc} \geq \frac{8abc}{a^2 + 1}$ .

Аналогічно

$$2\sqrt{ab} \geq \frac{8abc}{c^2 + 1}, \quad 2\sqrt{ca} \geq \frac{8abc}{b^2 + 1}.$$

Зрозуміло, що нам достатньо довести нерівність  $a + b + c + \sqrt{3} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ .

За нерівністю Коші-Буняковського, з урахуванням нерівності  $1 \geq ab + bc + ca$ , одержимо:

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{1 + 1 + 1} \sqrt{ab + bc + ca} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

До того ж, за нерівністю трьох квадратів

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

З двох останніх нерівностей отримуємо потрібний результат.

(Далі буде)